# COORDENADAS AOS PONTOS DO ESPAÇO. RETAS E PLANOS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas são revisões de notas de aulas digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Depois de darmos coordenadas aos vetores do Espaço, podemos fazê-lo para os pontos. Logo em seguida estamos aptos a dar equações às retas e aos planos.

## 1. Coordenadas aos pontos do Espaço

**Definição 1.** *Direms que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é um **sistema de coordendas para os pontos do Espaço** se, e somente se, $O$ é ponto e $\mathcal{B}$ é base para $\mathbb{V}^3$.*

*O ponto $O$ será chamado de **origem** de $\Sigma$ enquando $\mathcal{B}$ de **base**. Por vezes escreveremos $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ no lugar de $\big(O, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\big)$.*

*Para cada $P$, ponto, uma vez que $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}^3$, diremos que*

$$P = (x, y, z)_\Sigma \text{ se, e somente se, } \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_\mathcal{B}.$$

*Neste caso, diremos que $P$ **tem coordenadas** $(x, y, z)$ **com relação ao sistema** $\Sigma$. A primeira coordenda do par citado é chamado de **abscissa**, a segunda de **ordenada** e a terceira de **cota**. A reta que passa pela origem e é paralela ao primeiro vetor da base é chamado de **eixo das abscissas**; a reta que também passa pela origem e é paralela ao segundo vetor da base é chamada de **eixo das ordenadas**; enquando a reta que passa pela origem e é parelela ao terceiro vetor da base é o **eixos das cotas**. Os três eixos serão chamados de **eixos coordenados**. Os **planos coordenados** são aqueles que passam pela origem e são paralelos a dois dos eixos coordenados.*

*Se a base é ortonormal, diremos que o sistema é **ortogonal**.*

Observamos que, se $\Sigma = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, para $P \in \pi$,

$$P = (x, y, z)_\Sigma \text{ se, e somente se, } P = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}.$$

Naturalmente, $O = (0, 0, 0)_\Sigma$.

**Proposição 1.** *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do espaço. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$, $B = (x, y, z)_\Sigma$ então $\overrightarrow{AB} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B}$.*

*Demonstração.* Dado que $\overrightarrow{OA} = (a, b, c)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{OB} = (x, y, z)_\mathcal{B}$, então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B} \ .$$

□

**Corolário 1.** *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do espaço. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$ e $\vec{v} = (p, q, r)_\mathcal{B}$, então $A + \vec{v} = (a + p, b + q, c + r)_\Sigma$.*

*Demonstração.* Seja $Q = A + \vec{v}$. Daí $Q = (x, y, z)_\Sigma$. Como $\overrightarrow{AQ} = \vec{v} = (x - a, y - b, z - c)_\mathcal{B}$, então $p = x - a$, $q = y - b$ e $r = z - c$. Ou seja, $Q = (a + p, b + q, c + r)_\Sigma$. □

**Exercício 1.** *Dados os pontos $A = (2, -2, 3)$ e $B = (1, 1, 5)$, e o vetor $\vec{v} = (1, 3, 4)$, calcular:*
*(1) $A + 3\vec{v}$ (2) $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ (3) $B + 2\overrightarrow{AB}$ (4) $2\vec{v} - 3\overrightarrow{AB}$*

**Exercício 2.** *Dados os pontos $A = (3, -4, -2)$ e $B = (-2, 1, 0)$, determinar o ponto $N$ pertencente ao segmento $\overline{AB}$ tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.*

**Exercício 3.** *Dados os pontos $A = (1, -2, 3)$ $B = (2, 1, 4)$ e $C = (-1, -3, 1)$, determinar o ponto $D$ tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.*

**Exercício 4.** *Sendo $A = (2, -5, 3)$ e $B = (7, 3, -1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M = (4, -3, 3)$ o ponto de intersecção das diagonais, determinar os vértices $C$ e $D$.*

*Date*: 20241.

**Exercício 5.** *Determinar os três vértices de uma triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $M = (5, 0, -2)$, $N = (3, 1, -3)$ e $P = (4, 2, 1)$.*

**Exercício 6.** *Dados $A$ e $B$, pontos cujas coordenadas são conhecidas, determine fórmula para as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$.*

**Exercício 7.** *Sendo $A = (-2, 1, 3)$ e $B = (6, -7, 1)$ extremidades de um segmento, determinar:*

*(1) os pontos $C$, $D$ e $E$, nesta ordem, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes de mesmo comprimento;*
*(2) os pontos $F$ e $G$, nesta ordem, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes de mesmo comprimento.*

**Exercício 8.** *Dados os pontos $A = (-1, 0, 5)$, $B = (2, -1, 4)$ e $C = (-4, 7, 2)$, determinar $x$ tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo $P = (x, 0, x - 3)$.*

**Proposição 2.** *Seja $\Sigma$ um sistema de coordenada ortogonal. Se $A = (a, b, c)_\Sigma$, $B = (x, y, z)_\Sigma$ então $d(A, B) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.*

*Demonstração.* É imediato do fato que a base é ortonormal e $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(x - a, y - b, z - c)$ com relação a ela. □

**Exercício 9.** *Prove que os pontos $A = (-1, 2, 3)$, $B = (-3, 6, 0)$ e $C = (-4, 7, 2)$ são vértices de um triângulo retângulo.*

**Exercício 10.** *Dados os pontos $A = (m, 1, 0)$, $B = (m - 1, 2m, 2)$ e $C = (1, 3, -1)$, determine $m$ de modo que o triângulo $ABC$ seja retângulo em $A$. Calcule a área do triângulo.*

**Exercício 11.** *Prove que os pontos $A = (3, 4, 4)$, $B = (2, -3, 4)$ e $C = (6, 0, 4)$ são vértices de um triângulo. Determine o ângulo interno ao vértice $B$.*

**Exercício 12.** *Dados os pontos $A = (3, 4, -2)$, $B = (1, 2, 4)$ e $C = (2, 1, 6)$, determine o ponto **simétrico** a $A$ com relação à reta que passa por $B$ e $C$.*

**Exercício 13.** *Sejam $\triangle ABC$ e suponha conhecidas as coordenadas dos seus vértices. Determine fórmula para as coordenadas do baricentro de $\triangle ABC$.*

**Exercício 14.** *Consideremos $ABCD$ um tetraedro e tomemos a base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ e o sistema de coordenadas $\Sigma = (A, \mathcal{B})$. Sejam $P, Q, R, S, T$ e $U$ os pontos médios das arestas $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente; enquanto $E, F, G$ e $H$ são os baricentros das faces $\Delta BCD$, $\Delta ACD$, $\Delta ABD$ e $\Delta ABC$, respectivamente.*

(a) *Determine as coordenadas $B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S, T$ e $U$ no sistema $\Sigma$.*
(b) *Uma **bimediana de um tetraedro** é o segmento determinado pelos pontos médios de duas arestas opostas. Quais são as bimedianas do tetraedro $ABCD$? Mostre que todas as **3 (três)** bimedianas do tetraedro $ABCD$ têm o mesmo ponto médio. Esse ponto de encontro das três bimedianas de um tetraedro é chamado de **centróide** do tetraedro $ABCD$.*
(c) *Uma **mediana do tetraedro** é o segmento de reta determinado por um vértice e o baricentro da face oposta. Mostre que todas as **4 (quatro)** medianas do tetraedro $ABCD$ se encontram no seu centróide. Este divide cada mediana em qual proporção?*

**Exercício 15.** *Se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$. Supondo que $ABCD$ formam um tetraedro, determine fórmula para o centróide do tetraedro $ABCD$.*

Antes de discutirmos colinearidade entre pontos vamos discutir coplanaridade.

**Teorema 3.** *Se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$, então $A, B, C$ e $D$ são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

*Demonstração.* Primeiro observemos que o determinante descrito no enunciado do teorema não muda, se tomamos a segunda linha subtraída por $x_1$ vezes a primeira linha, a segunda subtraída por $y_1$ vezes a primeira e por fim a terceira subtraída por $z_1$ vezes a primiera. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ 0 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ 0 & z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix},$$

lembrando que a última igualdade vale quando desenvolvemos o determinante por cofatores da primeira coluna. Uma vez que $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ e $\overrightarrow{AD} = (x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$, concluímos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] .$$

Sendo assim, $A, B, C$ e $D$ são coplanares se, e somente se, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ são coplanares, ou seja, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$. □

**Exercício 16.** *Nas mesmas condições do teorema anterior, suponha que $A, B, C$ e $D$ formam um tetraedro e determine fórmula para seu volume.*

**Exercício 17.** *Suponha que $A = (a, b, c)$, $B = (x, y, z)$ e $C = (p, q, r)$.*

*(1) Mostre que $A, B$ e $C$ estão alinhados se, e somente se,* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & p \\ b & y & q \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & p \\ c & z & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}$.

*(2) Mostre que, se $A, B$ e $C$ estão alinhados, então* $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0$.

*(3) Apresente exemplo de pontos $A$, $B$ e $C$, **não alinhados** tais que* $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 0$.

## 2. Retas e equações

Lembremos que, dados um ponto $A$ e um vetor $\vec{v} \neq 0$, fica determinada uma **única** reta $r$ tal que $A \in r$ e $\vec{v} // r$. A reta $r$ tem equação vetorial

$$X = A + \lambda \vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}) .$$

**Exercício 18.** *Verifique se os pontos abaixo pertencem à reta $r\colon X = (1,0,1) + \lambda(2,1,1) (\lambda \in \mathbb{R})$.*

*(1)* $(4,1,-1)$ *(2)* $(3,1,2)$ *(3)* $(-1,-1,0)$

Fixado um sistema de coordenadas para o espaço, então $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, e para $X$,

$$X = (x, y, z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \text{, para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, a reta que passa por $A$ e é paralela ao vetor $\vec{v}$ é descrita por um sistema de equações que é chamado de **sistema de equações paramétricas** para a reta ou simplesmente por **equações da reta na forma paramétrica**.

**Exercício 19.** *Ache equações paramétricas da reta que passa por $A = (3,3,3)$ e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$, sendo $B = (1,1,0)$ e $C = (-1,0,-1)$.*

**Exercício 20.** *Dados a reta $r\colon X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$ e os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$, ache o ponto de $r$ equidistante de $A$ e $B$.*

**Exercício 21.** *Calcule a distância do ponto $P = (1, 0, 1)$ à reta $r\colon X = (0, 0, 0) + \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\lambda \in \mathbb{R})$.*

**Exercício 22.** *Mostre que os pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema* $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ *formam uma reta. Explicite uma equação vetorial desta.*

Retornemos à reta $r$ que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, não nulo. Agora suponhamos que **todas** as coordenadas de $\vec{v}$ sejam não nulas. Observamos que, para $X = (x, y, z)$,

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\ .$$

Este último sistema de equações é chamado de **sistema de equações da reta $r$ na forma simétrica** ou, mais simplesmente, **equações da reta $r$ na forma simétrica**.

**Exercício 23.** *Mostre que as equações $\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$ descrevem uma reta. Exiba equação vetorial e sistema de equações paramétricas para essa reta.*

**Exercício 24.** *Dados os pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (3, 0, -1)$, verifique se são concorrentes as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $r\colon X = (4, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$). Se forem, determine o ponto de interseção.*

**Exercício 25.** *Verifique se as retas $r$ e $s$ são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de interseção.*

*(1)* $r\colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ *(para $\lambda \in \mathbb{R}$)* $\qquad s\colon \begin{cases} x = 9 - 4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$ *(para $\mu \in \mathbb{R}$)*

*(2)* $r\colon \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1 + 8\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ *(para $\lambda \in \mathbb{R}$)* $\qquad s\colon x - 1 = y - 4 = z$

*(3)* $r\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = z \qquad s\colon x = \frac{y}{3} = \frac{1+z}{2}$

*(4)* $r\colon X = (3, -1, 2) + \lambda(-2, 3, 1)$ *(para $\lambda \in \mathbb{R}$)* $s\colon X = (9, -10, -1) + \mu(4, -6, -2)$ *(para $\mu \in \mathbb{R}$)*

**Exercício 26.** *Sejam $r$ a reta que passa pelo ponto $A$ e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, e $P$ um ponto. Mostre que, se $B \in r$ e $\vec{u}$ também é vetor diretor de $r$, então $A + \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP} = B + \text{proj}_{\vec{u}}\overrightarrow{BP}$.*

**Proposição 4.** *Sejam $r$ a reta que passa pelo ponto $A$ e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, e $P$ um ponto. Então a distância de $P$ a $r$ é*

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}\ .$$

*Demonstração.* Se $P \in r$, então $d(P, r) = 0$. Ainda $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, visto que $\overrightarrow{AP} // \vec{v}$.

Suponhamos $P \notin r$ e seja $B = A + \vec{v}$. Logo a distância de $P$ a $r$ é a altura do triângulo $\triangle PAB$ com relação à base $\overline{AB}$. Seja $h$ o tamanho dessa altura. Daí a área de $\triangle PAB$ é $\frac{h\|\overrightarrow{AB}\|}{2}$. Por outro lado essa mesma área é $\frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{2}$. Como $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, concluímos que

$$d(P, r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}\ .$$

□

**Exercício 27.** *Nas mesmas condições da proposição anterior mostre que, se $B \in r$ e $\vec{u}$ também é vetor diretor de $r$, então $d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.*

**Exercício 28.** *A altura e a mediana relativas ao vértice $B$ do triângulo $\Delta ABC$ estão contidas, respectivamente, em $r\colon X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$) e $s\colon X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$ (para $\mu \in \mathbb{R}$). Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine $A$ e $B$.*

**Definição 2.** *Para as retas $r$ e $s$, dizemos são **reversas** se, e somente se, não existe plano que as contenha.*

Se $r$ e $s$ são retas **não** reversas, fixemos plano $\pi$ que as contenha. Sendo assim, $r$ e $s$ podem ser:

(1) paralelas e coincidentes, ou seja, $r = s$. Neste caso, $r$ e $s$ têm os mesmos vetores diretores e $r \cap s \neq \emptyset$.

(2) paralelas e disjuntas. Neste caso, $r$ e $s$ têm os mesmos vetores diretores mas $r \cap s = \emptyset$.
(3) concorrentes. Neste caso, $r \cap s$ é unitário.

**Exercício 29.** *Sejam $r$ e $s$ retas paralelas. Mostre que, para $X, Y \in r$, $d(X, s) = d(Y, s)$.*

**Proposição 5.** *Sejam $A$ e $B$, pontos, e $\vec{v}$ e $\vec{u}$, vetores não nulos. Sejam $r\colon X = A + \lambda\vec{u}$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$) e $s\colon Y = B + \mu\vec{v}$ (para $\mu \in \mathbb{R}$) retas **não** paralelas. Temos que $r$ e $s$ são retas reversas se, e somente se, $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.*

*Neste caso, a distância entre $r$ e $s$ é $d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.*

*Demonstração.* Dado que $r$ e $s$ não são paralelas, sabemos que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ e deste modo $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base para $\mathbb{V}^3$. Logo existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n} \ .$$

Observamos que $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{n} = \gamma \|\vec{n}\|^2$, pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ambos ortogonais a $\vec{n}$. Logo $\gamma \|\vec{n}\|^2 = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$. Seja $P = A + \alpha\vec{u}$. Sendo assim, $P \in r$ e

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} - \overrightarrow{AB} = -\beta\vec{v} - \gamma\vec{n} \ .$$

Logo

$$d(P, s) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\gamma| \, \|\vec{n} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\gamma| \, \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = |\gamma| \, \|\vec{n}\| \ ,$$

dado que $\vec{v} \perp \vec{n}$. Ainda $d(P, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Suponhamos que $r$ e $s$ são reversas. Logo $r \cap s = \emptyset$ e $P \notin s$. Daí $d(P, s) \neq 0$ e $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$.

Suponhamos agora que $r$ e $s$ não são reversas. Neste caso, dado que não são paralelas, $r \cap s = \{R\}$. Sendo assim, $\overrightarrow{AR} = \lambda\vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, enquando $\overrightarrow{BR} = \mu\vec{v}$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{v} \ .$$

Já que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base, deduzimos que $\alpha = \lambda$, $\beta = -\mu$ e $\gamma = 0$. Logo, $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Ainda, $R = P$ e $r \cap s = \{P\}$.

Seja $Q = B - \beta\vec{v}$. Daí $Q \in s$. Observamos que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} = \big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}\big) - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v} = \gamma\vec{n} \ .$$

Sendo assim, $\overrightarrow{PQ}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Além disto é ortogonal às retas $r$ e $s$. Fixemos $X \in r$ e $Y \in s$. Temos que $\overrightarrow{PX} = \delta\vec{u}$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{QY} = \epsilon\vec{v}$, para algum $\epsilon \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY}$. Seja $\vec{w} = \overrightarrow{QY} - \overrightarrow{PX} = \epsilon\vec{v} - \delta\vec{u}$. Sendo assim,

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{w} = (\gamma\vec{n}) \bullet (\epsilon\vec{v} - \delta\vec{u}) = 0 \ ,$$

pois $\vec{n} \bullet \vec{u} = 0 = \vec{n} \bullet \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{w}$ e, como $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$,

$$\|\overrightarrow{XY}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \ .$$

Ou seja, $d(X, Y) \geq d(P, Q)$, para quaisquer $X \in r$ e $Y \in s$. Lembrando que $P \in r$ e que $Q \in s$, temos que $d(r, s) = d(P, Q) = |\gamma| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$. □

**Exercício 30.** *Verifique que as duas retas:*

$$r\colon X = (1, 1, 1) + \lambda(1, 0, 1), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ e$$
$$s\colon Y = (1, 3, -1) + \mu(-1, 0, 1), \ \mu \in \mathbb{R}.$$

*são reversas; determine os extremos no segmento que é ortogonal a $r$ e a $s$ e a distância de $r$ a $s$.*

**Exercício 31.** *Dadas as retas*

$$r\colon \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s\colon x = \tfrac{y}{m} = z \qquad t\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

*calcule $m$ em cada caso:*

*(1) $r$ e $s$ são paralelas*
*(2) $r$ e $t$ são concorrentes*
*(3) $r$ e $s$ são reversas*
*(4) $r$, $s$ e $t$ são paralelas a um mesmo plano*
*(5) $s$ e $t$ são coplanares*

## 3. Planos e equações

Finalmente vamos dar equações aos planos.

**Definição 3.** *Dado um plano $\pi$, toda base $(\vec{u}, \vec{v})$ para os vetores de $\pi$ também será chamada de* ***par de vetores diretores de*** *$\pi$, ou simplesmente diremos que* ***$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de*** *$\pi$.*

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos entre si, e $A$, ponto, fica determinado um único plano $\pi$ tal que $A \in \pi$ e $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores de $\pi$. Lembremos que, para $X$, ponto, são equivalentes:

(1) $X \in \pi$,
(2) $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ são coplanares, e
(3) existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Sendo assim,

$$X \in \pi \text{ se, e somente se, } X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

**Definição 4.** *Sejam $A$ um ponto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos. Se $\pi$ é o plano tal que $A \in \pi$ e de qual $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores, a equação*

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

*é chamada de* ***equação vetorial do plano*** *$\pi$ ou* ***equação do plano $\pi$ na forma vetorial****. Muitas vezes o plano $\pi$ será dito* ***o plano que passa por $A$ e é paralela aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$****. Esta situação será representada por*

$$\pi\colon X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \ .$$

É importante observar que plano não tem equação vetorial única pois quando fixamos outro ponto da reta ou outros vetores diretores do plano a equação pode efetivamente mudar.

Ainda nas condições da definição, se fixamos um sistema de coordenadas para o espaço, então $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Para $X = (x, y, z)$,

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p), \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}, \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, o plano, que passa por $A$ e é paralelos aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é descrito por um sistema de equações que será chamado de **sistema de equações paramétricas do plano** ou ainda **sistema de equações do plano na forma paramétrica**.

**Proposição 6.** *Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$ vetores não paralelos e $\pi$ o plano que passa por $A$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, para o ponto $X = (x, y, z)$,*

$$X \in \pi \text{ se, e somente se, } \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

*onde $\vec{u} \wedge \vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\delta = -(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)$.*

*Demonstração.* Observamos que

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad [\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = \overrightarrow{AX} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \ .$$

□

É importante notar que na equação "$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$" temos $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$ pois $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ e o vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$.

**Teorema 7.** *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. O conjunto dos pontos $X = (x, y, z)$, que satisfazem a equação $Ax + By + Cz + D = 0$, é um plano perpendicular ao vetor $(A, B, C)$.*

*Demonstração.* Sejam $\vec{n} = (A, B, C)$. Logo $\vec{n} \neq \vec{0}$. Fixemos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ é base ortogonal. Sejam $x_0 = -\frac{AD}{\|\vec{n}\|^2}$, $y_0 = -\frac{BD}{\|\vec{n}\|^2}$, $z_0 = -\frac{CD}{\|\vec{n}\|^2}$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$. Como

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = \frac{-A^2D - B^2D - C^2D}{\|\vec{n}\|^2} + D = -\frac{(A^2 + B^2 + C^2)D}{\|\vec{n}\|^2} + D = 0 \ ,$$

induzimos que $P$ satisfaz a equação $Ax + By + Cz + D = 0$ e que $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Por outro lado, para $X = (x, y, z)$, ponto,

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ 0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = (A, B, C) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \vec{n} \bullet \overrightarrow{PX} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ (para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}), \end{gathered}$$

ou equivalentemente, $X$ está no plano que passa por $P$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como $\vec{n}$ é perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, o plano é perpendicular a $\vec{n}$. □

**Definição 5.** *Toda equação da forma "$Ax + By + Cz + D = 0$" (com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$), que descreve os pontos de um plano $\pi$, será chamada de* ***equação geral do plano*** *$\pi$ ou* ***equação de*** *$\pi$* ***na forma geral****. Indicaremos esta situação por*

$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

**Exercício 32.** *Obtenha uma equação geral do plano $\pi$ que passa por $A = (0, 1, 2)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (4, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.*

**Exercício 33.** *Obtenha uma equação geral do plano $\pi$ que passa pelo ponto $A = (1, 0, 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$.*

**Exercício 34.** *Escreva equações paramétricas para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1\colon 2x - y - 3 = 0$ e $\pi_2\colon 3x + y + 2z - 1 = 0$.*

**Exercício 35.** *Qual o ponto da reta $s\colon X = (-1, 3, 3) + \lambda(-1, 2, 3)\,(\lambda \in \mathbb{R})$, que está no plano $\pi\colon x + y + z = 1$?*

**Exercício 36.** *Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi\colon 2x + y - z = 2$.*

**Exercício 37.** *Obtenha a interseção da reta $r$ com o plano $\pi$ (se houver):*

*(1)* $r\colon X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ *(para $\lambda \in \mathbb{R}$)* $\qquad \pi\colon x + y + z = 20$

*(2)* $r\colon X = (0, 1, 1) + \mu(2, 1, -3)$ *(para $\mu \in \mathbb{R}$)* $\pi\colon X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$ *(para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)*

*(3)* $r\colon \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$ $\qquad \pi\colon 2x + y - z - 6 = 0$

*(4)* $r\colon x - 2 = 3 - y = \frac{z-1}{4}$ $\qquad \pi\colon X = (-4, -6, 2) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(3, 3, 2)$ *(para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)*

**Exercício 38.** *Ache uma equação geral do plano $\sigma$ que passa pelo ponto $P = (1, 0, 0)$ e* ***contém*** *a reta $r\colon \begin{cases} x = 2, \quad y = \lambda, \quad z = 2 + \lambda \end{cases}\ , (\lambda \in \mathbb{R})$.*

**Corolário 2.** *Sejam $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ e $\sigma\colon Ex + Fy + Gz + H = 0$, planos. Então*

$$\pi // \sigma \quad \textit{se, e somente se,} \quad (A, B, C) // (E, F, G).$$

*Demonstração.* Sejam $\overrightarrow{n_1} = (A, B, C)$ e $\overrightarrow{n_2} = (E, F, G)$.

Suponhamos que $\pi // \sigma$ e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de $\pi$. Pelo teorema anterior, sabemos que $\overrightarrow{n_1} // (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Dado que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também são vetores diretores de $\sigma$, deduzimos que $\overrightarrow{n_2} // (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Uma vez que $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ são todos não nulos, concluímos que $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$.

Suponhamos que $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$. Para $\vec{t}$, vetor, $\vec{t} \perp \overrightarrow{n_1}$ se, e somente se, $\vec{t} \perp \overrightarrow{n_2}$. Portanto todo vetor paralelo a $\pi$ é paralelo a $\sigma$ e vice-versa. Daí $\pi$ e $\sigma$ são planos paralelos. □

**Exercício 39.** *Suponhamos que $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ e $\sigma\colon Ex + Fy + Gz + H = 0$ são planos não paralelos. Apresente ponto em $\pi \cap \sigma$. Mostre que $\pi \cap \sigma$ é uma reta. Determine vetor diretor para esta reta.*

**Exercício 40.** *Mostre que toda reta pode ser escrita como a interseção de dois planos não paralelos.*

**Corolário 3.** *Sejam $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$, ou $B \neq 0$, ou $C \neq 0$, ou $A' \neq 0$, ou $B' \neq 0$ ou $C' \neq 0$. As equações "$Ax + By + Cz + D = 0$" e "$A'x + B'y + C'z + D' = 0$" determinam o mesmo plano $\pi$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$, $C' = \lambda C$ e $D' = \lambda D$.*

*Demonstração.* Sejam $\overrightarrow{n_1} = (A, B, C)$ e $\overrightarrow{n_2} = (A', B', C')$.

Suponhamos que "$Ax + By + Cz + D = 0$" e "$A'x + B'y + C'z + D' = 0$" determinem o mesmo plano $\pi$. Pelo teorema anterior, $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$. Portanto $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$ e $C' = \lambda C$. Como ambos os vetores são não nulos, $\lambda \neq 0$. Como $\left(-\frac{AD}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}, -\frac{BD}{\|\overrightarrow{n_1}^2\|}, -\frac{CD}{\|\overrightarrow{n_1}^2\|}\right) \in \pi$,

$$0 = A'\left(-\tfrac{AD}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + B'\left(-\tfrac{BD}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + C'\left(-\tfrac{CD}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + D' = D' - \tfrac{(\lambda A)AD+(\lambda B)BD+(\lambda C)CD}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = D' - \tfrac{\lambda(A^2+B^2+C^2)D}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = D' - \lambda D \ .$$

Ou seja, $D' = \lambda D$.

Suponhamos que $A' = \mu A$, $B' = \mu B$, $C' = \mu C$ e $D' = \mu D$, para $\mu \in \mathbb{R}^*$. Logo

$$A'x + B'y + C'z + D' = \mu\big(Ax + By + Cz + D\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Sendo assim, as duas equações determinam o mesmo plano. □

**Exercício 41.** *Mostre que as retas $r$ e $s$ determinam um plano $\pi$ e obtenha uma equação geral de $\pi$.*
*(1)* $r\colon x - 1 = y = 2z$ *e* $s\colon x - 1 = y = z$ *(2)* $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ *e* $s\colon \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$

**Proposição 8.** *Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$ e $R = (x_2, y_2, z_2)$, pontos não alinhados, e $\pi$ o plano determinado por $P, Q$ e $R$. Para $X = (x, y, z)$,*

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

*Demonstração.* É imediato do fato que $X \in \pi$ se, e somente se, $X$, $P$, $Q$ e $R$ são coplanares. □

**Proposição 9.** *Sejam $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ um ponto e $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ um plano. Se $\vec{n} = (a, b, c)$ e $A \in \pi$, então $Q = P + \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}$ é o ponto de $\pi$ mais próximo de $P$ e a distância de $P$ ao plano $\pi$ é*

$$d(P, \pi) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

*Demonstração.* Seja $(\vec{u}, \vec{v})$ um par de vetores diretores de $\pi$. Naturalmente $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ é base para $\mathbb{V}^3$. Temos que $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{AQ}$ são ortogonais a $\vec{n}$. Logo $\overrightarrow{AQ} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $Q = A + \overrightarrow{AQ} \in \pi$. Tomemos $X \in \pi$. Logo $\overrightarrow{QX} // \pi$ e $\overrightarrow{QX} \perp \overrightarrow{PQ}$. Sendo assim

$$\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QX}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \ ,$$

e, consequentemente, $\|\overrightarrow{PX}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$ e, de fato, $Q$ é o ponto de $\pi$ mais próximo de $P$.

A distância de $P$ ao plano $\pi$ é

$$d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}\| = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} \ .$$

Suponhamos $A = (x_0, y_0, z_0)$. Daí $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ e

$$\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = (\alpha - x_0, \beta - y_0, \gamma - z_0) \bullet (a, b, c) = a(\alpha - x_0) + b(\beta - y_0) + c(\gamma - z) = a\alpha + b\beta + c\gamma + d \ .$$

Logo $d(P, \pi) = \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. □

**Exercício 42.** *Sejam $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $\sigma\colon ax + by + cz + e = 0$. Mostre que $d(X, \sigma) = d(Y, \sigma)$, para quaisquer $X, Y \in \pi$. Determine fórmula para a distância entre $\pi$ e $\sigma$.*

**Exercício 43.** *Nas mesmas condições da proposição anterior, mostre que, se $B \in \pi$, então $P + \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PB} = Q$.*

**Exercício 44.** *Calcule a distância do ponto $P = (1, 2, -1)$ ao plano $\pi\colon 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.*

**Exercício 45.** *Calcule a distância de $P = (1, 3, -4)$ ao plano*

$$\pi\colon X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(-1, 0, 3)(\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

**Exercício 46.** *Sejam $P$ um ponto e $\pi$ o plano que passa por $A$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja $R$ o ponto simétrico ao $P$ com relação ao plano $\pi$.*

*(1) Determine fórmula vetorial para determinar $R$.*
*(2) Se $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, determine fórmula para $R$.*

**Exercício 47.** *Determine o ponto simétrico a $P = (1, -2, 0)$ com relação ao plano $\pi\colon 4x - 4y - 2z = 3$.*

**Exercício 48.** *Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dois pontos distintos. Mostre que os pontos que equidistam de $A$ e $B$ determinam um plano. Determine características deste plano em função de $A$ e $B$.*

**Lema 10.** *Sejam $\sigma$ o plano que passa por $A$ e é ortogonal ao vetor $\vec{n} \neq \vec{0}$ e $r$ a reta que também passa por $A$ e é paralela ao vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $\vec{w} \not\parallel \vec{n}$, então o vetor $\vec{u} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{n}}\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $s$ é a reta que passa por $A$ e paralela ao vetor $\vec{u}$, então $s \subseteq \sigma$. Ainda, para todo $\vec{t}\,//\sigma$, $\text{ang}(\vec{t}, \vec{w}) \geq \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$.*

*Demonstração.* Se $\vec{u} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{n}}\vec{w} = \vec{0}$, então $\vec{w}//\vec{n}$, o que não acontece. Seja $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$. Logo $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ é base ortogonal para $\mathbb{V}^3$ pois $\vec{u} \perp \vec{n}$. Ainda $(\vec{u}, \vec{v})$ é par de vetores diretores para $\sigma$. Naturalmente $s \subseteq \sigma$.

Seja $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$. Daí

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{u} \bullet \left(\vec{u} + \text{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\right)}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{w}\|} \ ,$$

lembrando que $\text{proj}_{\vec{n}}\vec{w}//\vec{n}$ e $\vec{n} \perp \vec{u}$. Concluímos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ pois $\cos\theta > 0$.

Sejam $\vec{t}\,//\pi$, não nulo, e $\varphi = \text{ang}(\vec{t}, \vec{w})$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Visto que $\vec{u} \perp \vec{v}$,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{t} \bullet \vec{w}}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \text{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\right)}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\alpha\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{t}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\alpha\|\vec{u}\|}{\|\vec{t}\|}\cos\theta \ ,$$

pois $\vec{u}$, $\text{proj}_{\vec{n}}\vec{w}$ e $\vec{v}$ são 2 a 2 perpendiculares. Observamos que

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{\alpha^2\|\vec{u}\|^2 + \beta^2\|\vec{v}\|^2} \geq \sqrt{\alpha^2\|\vec{u}\|^2} = |\alpha|\,\|\vec{u}\| \ .$$

Logo $\frac{|\alpha|\|\vec{u}\|}{\|\vec{t}\|} \leq 1$ e $\cos\varphi \leq |\cos\varphi| \leq \cos\theta$. Concluímos que $\varphi \geq \theta$, já que a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$. □

**Proposição 11.** *Sejam $\sigma$ um plano ortogonal ao vetor $\vec{n} \neq \vec{0}$ e $r$ uma reta paralela ao vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$. Se $r \cap \sigma \neq \emptyset$, então os menores ângulos entre $r$ e $\sigma$ medem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que*

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{w}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{w}\|} \ .$$

*Demonstração.* Se $\vec{n}//\vec{w}$, então $r \perp \sigma$ e **todos** os ângulos entre $r$ e $\sigma$ são retos. Logo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\,\theta = 1$. Por outro lado, de acordo com Cauchy-Schwarz, $|\vec{n} \bullet \vec{w}| = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{w}\|$. Sendo assim, vale a tese do corolário.

Suponhamos que $\vec{n} \not\parallel \vec{w}$. Pela proposição anterior, $\vec{u} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{n}}\vec{w} \neq \vec{0}$ e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$. Uma vez que $\cos\theta = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{w}\|}$, chegamos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Visto que $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\text{proj}_{\vec{n}}\vec{w}\|^2$. Consequentemente

$$\|\vec{w}\|^2 = \cos^2\theta\,\|\vec{w}\|^2 + \frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{n}\|^2} \ ,$$

ou seja, $\frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{n}\|^2} = \|\vec{w}\|^2 - \cos^2\theta\,\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 \cdot \text{sen}^2\theta$. Sendo assim, $\text{sen}^2\theta = \frac{|\vec{w} \bullet \vec{n}|^2}{\|\vec{w}\|^2 \cdot \|\vec{n}\|^2}$ e segue a tese da proposição também neste caso. □

**Exercício 49.** *Calcule a medida do ângulo $\theta$ entre $r$:* $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ *, $(\lambda \in \mathbb{R})$, e $\pi$: $y + z - 10 = 0$.*

**Proposição 12.** *Sejam $\pi$: $Ax + By + Cz + D = 0$ um plano e $r$ a reta que passa pelo ponto $P$ e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja $\vec{n} = (A, B, C)$.*

*(1) Se $\vec{n}$ não é perpendicular a $\vec{v}$, então $\pi \cap r$ é conjunto unitário.*
*(2) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \in \pi$, então $r \subseteq \pi$.*
*(3) Se $\vec{n} \perp \vec{v}$ e $P \notin \pi$, então $\pi \cap r = \emptyset$.*

*De fato, em cada um dos itens, vale a equivalência.*

*Demonstração.* Sejam $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v} = (\rho, \sigma, \tau)$ e $\mu = A\alpha + B\beta + C\gamma + D$. Observamos que, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P+\lambda\vec{v}\in\pi \Leftrightarrow A(\alpha+\rho\lambda)+B(\beta+\sigma\lambda)+C(\gamma+\tau\lambda)+D=0 \Leftrightarrow (A\rho+B\sigma+C\tau)\lambda+\mu=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\vec{n}\bullet\vec{v}\big)\lambda+\mu=0\ .$$

(1) Suponhamos que $\vec{n}\bullet\vec{v}\neq 0$. Logo a equação "$\big(\vec{n}\bullet\vec{v}\big)\lambda+\mu=0$" admite uma única solução, ou seja, $\pi\cap r$ é conjunto unitário.
(2) Se $\vec{n}\perp\vec{v}$ e $P\in\pi$, então $\vec{n}\bullet\vec{v}=0=\mu$ e consequentemente, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, $P+\lambda\vec{v}\in\pi$. Neste caso, $r\subseteq\pi$.
(3) Se $\vec{n}\perp\vec{v}$ e $P\notin\pi$, então $\vec{n}\bullet\vec{v}=0\neq\mu$. Neste caso, **não** existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $P+\lambda\vec{v}\in\pi$, ou seja, $\pi\cap r=\emptyset$.

Em cada item vale a equivalência pois há somente três possibilidades mutualmente exclusivas entre plano e reta: "$\pi\cap r$ é unitário" ou "$r\subseteq\pi$" ou "$\pi\cap r=\emptyset$". □

**Exercício 50.** *Estude a posição relativa entre $r$ e $\pi$.*

*(1)* $r\colon X=(1,1,1)+\lambda(3,2,1)$ *e* $\pi\colon X=(1,1,3)+\mu(1,-1,1)+\nu(0,1,3)$
*(2)* $r\colon X=(2,2,1)+\lambda(3,3,0)$ *e* $\pi\colon X=(1,0,1)+\mu(1,1,1)+\nu(0,0,3)$
*(3)* $r\colon x-2y=3-2z+y=2x-z$ *e* $\pi\colon X=(1,4,0,)+\mu(1,1,1)+\nu(2,1,0)$
*(4)* $r\colon X=(1,1,0)+\lambda(0,1,1)$ *e* $\pi\colon x-y-z=2$
*(5)* $r\colon \frac{x+2}{3}=y-1=\frac{z+3}{3}$ *e* $\pi\colon 3x-6y-z=0$

**Exercício 51.** *Nos casos onde houver intersecção não vazia entre $r$ e $\pi$, determine o(s) ponto(s) na intersecção para os casos no exercício anterior.*

**Exercício 52.** *Um cubo tem diagonal $\overline{AB}$ e uma das faces está contida no plano $\pi\colon x-y=0$. Sabendo que $A=(1,1,0)$ e $B=(1,3,\sqrt{2})$, determine os demais vértices.*

**Exercício 53.** *Uma pirâmide tem por base um retângulo $ABCD$ e seu vértice $P=(1,1,1)$ projeta-se ortogonalmente sobre o centro da base. A face $\Delta PAB$ está contida em $\pi_1\colon x-y+z=0$ e a face $\Delta PCD$, em $\pi_2\colon x+y+z-3=0$. Determine $B$, $C$ e $D$, sabendo que $A=(1,0,0)$ e que o ponto $Q=(1,-1,0)$ pertence ao plano da base.*